PART4 平方の大小関係

要点 ① 正の数の大小と平方の大小

$a>0$，$b>0$ のとき，a^2 と b^2 の大小関係を考える。

$$a^2>b^2 \iff a^2-b^2>0$$

であるから，a^2-b^2 の符号を考える。

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

$a>0$，$b>0$ より，$a+b>0$ であるから，a^2-b^2 と $a-b$ の符号は一致する。つまり

$$a^2-b^2>0 \iff a-b>0 \iff a>b$$

であるから，次のことが成り立つ。

正の数の大小と平方の大小

$a>0$，$b>0$ のとき

$$a>b \iff a^2>b^2 \qquad a\geqq b \iff a^2\geqq b^2$$

※上記は $a\geqq 0$，$b\geqq 0$ のときも成り立つ。

このことを，不等式の証明に用いることができる。

平方の大小を用いた不等式 $A>B$ の証明

$A>0$，$B>0$ ならば，不等式 $A>B$ を証明するとき，$A^2>B^2$ が成り立つことを示してもよい。

例 $a>0$ のとき，不等式 $a+2>2\sqrt{a+1}$ が成り立つことを証明する。

両辺の　　　　を考えると

$$\qquad=(a^2+4a+4)-4(a+1)=a^2$$

$a>0$ であるから $a^2>0$

よって　$(a+2)^2>(2\sqrt{a+1})^2$

$a+2>0$，$2\sqrt{a+1}>0$ であるから　$a+2>2\sqrt{a+1}$

[MEMO]

4 $a>0$ のとき，不等式 $1+\sqrt{a}>\sqrt{1+a}$ を証明せよ。

Point Pickup

不等式 $A>B$ の証明（$A^2-B^2>0$ の利用）

$A>0$，$B>0$ ならば，A^2-B^2 を計算し，その結果が正であることを示してもよい。

第 2 講　PART4 確認問題

1 $a>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。

$$\sqrt{a}+2>\sqrt{a+4}$$

[証明]

両辺の平方の差を考えると

$$(\sqrt{a}+2)^2-(\sqrt{a+4})^2$$

$$=(a+\boxed{\text{ア}}\sqrt{a}+4)-(a+\boxed{\text{イ}})$$

$$=\boxed{\text{ウ}}\sqrt{a}$$

$a>0$ であるから

$$\boxed{\text{ウ}}\sqrt{a}>\boxed{\text{エ}}$$

よって

$$(\sqrt{a}+2)^2>(\sqrt{a+4})^2$$

$\sqrt{a}+2>0$，$\sqrt{a+4}>0$ であるから

$$\sqrt{a}+2>\sqrt{a+4}$$

PART4 平方の大小関係

4 $a>0$ のとき，不等式 $1+\sqrt{a}>\sqrt{1+a}$ を証明せよ。

[解答]

両辺の平方の差を考えると

$$(1+\sqrt{a})^2-(\sqrt{1+a})^2=(1+2\sqrt{a}+a)-(1+a)=2\sqrt{a}$$

$a>0$ であるから

$$2\sqrt{a}>0$$

よって

$$(1+\sqrt{a})^2>(\sqrt{1+a})^2$$

$1+\sqrt{a}>0$，$\sqrt{1+a}>0$ であるから　$1+\sqrt{a}>\sqrt{1+a}$

第 2 講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：4，イ：4，ウ：4，エ：0

[解説]

両辺の平方の差を考えると　**[A]**

$$(\sqrt{a}+2)^2-(\sqrt{a+4})^2$$
$$=(a+4\sqrt{a}+4)-(a+4)$$
$$=4\sqrt{a}$$

$a>0$ であるから

$$4\sqrt{a}>0$$

よって

$$(\sqrt{a}+2)^2>(\sqrt{a+4})^2$$

$\sqrt{a}+2>0$，$\sqrt{a+4}>0$ であるから

$$\sqrt{a}+2>\sqrt{a+4}$$

[A]　不等式 $A>B$ の証明
$A>0$，$B>0$ ならば,
$A^2-B^2>0$ であることを示してもよい。